

Расчетно-графическая работа  
**“Модуль: Планирование эксперимента”**  
зачетная книжка ЗНД-17к-12

Вариант № 2

Задание

1. Определение основных статистических оценок выборки

1.1 Среднее арифметическое выборки

1.2 Дисперсия

1.3 Среднеквадратическое отклонение

1.4 Отбраковка по критерию Шовене

1.5 Правило «трёх сигм»

1.6 Коэффициент вариации  $V$

1.7 Доверительный интервал

1.8 Необходимое количество экспериментов

1.9 Проверка закона распределения СВ

1.10 Группировка данных

Таблица 1 – Исходные данные

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 10,5 | 12,0 | 9,5  | 14,5 | 12,0 | 11,0 | 12,5 | 11,0 | 12,0 | 12,0 |
| 12,0 | 13,5 | 7,0  | 10,0 | 12,5 | 12,0 | 16,0 | 12,0 | 12,5 | 12,5 |
| 12,5 | 9,5  | 13,0 | 3,7  | 16,0 | 14,5 | 18,0 | 13,5 | 13,0 |      |
| 13,0 | 7,0  | 13,5 | 12,0 | 18,0 | 10,0 | 20,5 | 9,5  | 15,0 |      |
| 15,0 | 13,0 | 11,5 | 12,5 | 20,5 | 3,7  | 17,0 | 7,0  | 12,0 |      |
| 8    | 13,5 | 9,5  | 16,0 | 17,0 | 12,0 | 32,0 | 13,0 | 12,5 |      |

Решение:

Выборка состоит из 56 значений.

Составим вариационный ряд, т.е. упорядочим числовые значения по возрастанию (табл. 2).

Определим основные статистические оценки выборки.

*1.1 Среднее арифметическое выборки*

Таблица 2 – Вариационный ряд

|      |      |      |      |      |    |     |     |     |     |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|
| 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6  | 7   | 8   | 9   | 10  | 11   | 12   | 13   | 14   |
| 3,7  | 3,7  | 7    | 7    | 7    | 8  | 9,5 | 9,5 | 9,5 | 9,5 | 10   | 10   | 10,5 | 11   |
| 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20 | 21  | 22  | 23  | 24  | 25   | 26   | 27   | 28   |
| 11   | 11,5 | 12   | 12   | 12   | 12 | 12  | 12  | 12  | 12  | 12   | 12   | 12,5 | 12,5 |
| 29   | 30   | 31   | 32   | 33   | 34 | 35  | 36  | 37  | 38  | 39   | 40   | 41   | 42   |
| 12,5 | 12,5 | 12,5 | 12,5 | 12,5 | 13 | 13  | 13  | 13  | 13  | 13,5 | 13,5 | 13,5 | 13,5 |
| 43   | 44   | 45   | 46   | 47   | 48 | 49  | 50  | 51  | 52  | 53   | 54   | 55   | 56   |
| 14,5 | 14,5 | 15   | 15   | 16   | 16 | 16  | 17  | 17  | 18  | 18   | 20,5 | 20,5 | 32   |

Вычислим среднее арифметическое результатов измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{56} \sum_{i=1}^{56} x_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{56} x_i = 714,9$$

$$\bar{x} = \frac{1}{56} \cdot 714,9 = 12,76607 \approx 12,8$$

### 1.2 Дисперсия

Дисперсия характеризует меру разброса около ее среднего значения (мера рассеивания, т.е. отклонения от среднего - смещенная оценка).

Оценку дисперсии по результатам измерений можно найти по формуле:

$$D(x) = S^2[x] = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}$$

$$D(x) = \frac{994,23}{56 - 1} = 18,07691 \approx 18,08$$

### 1.3 Среднеквадратическое отклонение

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(x)$ :

$$\sigma(x) = S = \sqrt{D(x)} = \sqrt{18,07691} = 4,251695 \approx 4,25$$

Результаты 56 измерений, отклонения результатов отдельных измерений от их среднего арифметического значения, квадратичные отклонения сведем в таблицу 3:

Таблица 3 – Расчет показателей

| №  | $x_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $(x_i - \bar{x})^2$ | №  | $x_i$          | $ x_i - \bar{x} $ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|----|-------|-------------------|---------------------|----|----------------|-------------------|---------------------|
| 1  | 3,7   | 9,1               | 82,81               | 29 | 12,5           | 0,3               | 0,09                |
| 2  | 3,7   | 9,1               | 82,81               | 30 | 12,5           | 0,3               | 0,09                |
| 3  | 7     | 5,8               | 33,64               | 31 | 12,5           | 0,3               | 0,09                |
| 4  | 7     | 5,8               | 33,64               | 32 | 12,5           | 0,3               | 0,09                |
| 5  | 7     | 5,8               | 33,64               | 33 | 12,5           | 0,3               | 0,09                |
| 6  | 8     | 4,8               | 23,04               | 34 | 13             | 0,2               | 0,04                |
| 7  | 9,5   | 3,3               | 10,89               | 35 | 13             | 0,2               | 0,04                |
| 8  | 9,5   | 3,3               | 10,89               | 36 | 13             | 0,2               | 0,04                |
| 9  | 9,5   | 3,3               | 10,89               | 37 | 13             | 0,2               | 0,04                |
| 10 | 9,5   | 3,3               | 10,89               | 38 | 13             | 0,2               | 0,04                |
| 11 | 10    | 2,8               | 7,84                | 39 | 13,5           | 0,7               | 0,49                |
| 12 | 10    | 2,8               | 7,84                | 40 | 13,5           | 0,7               | 0,49                |
| 13 | 10,5  | 2,3               | 5,29                | 41 | 13,5           | 0,7               | 0,49                |
| 14 | 11    | 1,8               | 3,24                | 42 | 13,5           | 0,7               | 0,49                |
| 15 | 11    | 1,8               | 3,24                | 43 | 14,5           | 1,7               | 2,89                |
| 16 | 11,5  | 1,3               | 1,69                | 44 | 14,5           | 1,7               | 2,89                |
| 17 | 12    | 0,8               | 0,64                | 45 | 15             | 2,2               | 4,84                |
| 18 | 12    | 0,8               | 0,64                | 46 | 15             | 2,2               | 4,84                |
| 19 | 12    | 0,8               | 0,64                | 47 | 16             | 3,2               | 10,24               |
| 20 | 12    | 0,8               | 0,64                | 48 | 16             | 3,2               | 10,24               |
| 21 | 12    | 0,8               | 0,64                | 49 | 16             | 3,2               | 10,24               |
| 22 | 12    | 0,8               | 0,64                | 50 | 17             | 4,2               | 17,64               |
| 23 | 12    | 0,8               | 0,64                | 51 | 17             | 4,2               | 17,64               |
| 24 | 12    | 0,8               | 0,64                | 52 | 18             | 5,2               | 27,04               |
| 25 | 12    | 0,8               | 0,64                | 53 | 18             | 5,2               | 27,04               |
| 26 | 12    | 0,8               | 0,64                | 54 | 20,5           | 7,7               | 59,29               |
| 27 | 12,5  | 0,3               | 0,09                | 55 | 20,5           | 7,7               | 59,29               |
| 28 | 12,5  | 0,3               | 0,09                | 56 | 32             | 19,2              | 368,64              |
|    |       |                   |                     |    | $\Sigma=714,9$ |                   | $\Sigma=994,23$     |

Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического  $S_x$ :

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$S_x = \frac{4,251695}{\sqrt{56}} = 0,568157 \approx 0,568$$

#### 1.4 Отбраковка по критерию Шовене

При проведении опытов при одинаковых условиях часто наблюдаются значения, резко отличающиеся от остальных. Отбраковка таких значений производится с помощью специальных методов. Один из них – критерий Шовене.

При отбраковке по критерию Шовене значение случайной величины должно находиться в интервале:

$$\bar{x} - \Delta \leq |x_i| \leq \bar{x} + \Delta$$

$$\Delta = \sigma \cdot k$$

где  $k$  – табличный коэффициент. При количестве измерений 56 он примерно равен 2,55.

$$\Delta = 4,25 \cdot 2,56 = 10,88$$

$$\bar{x} - \Delta = 12,8 - 10,88 = 1,92$$

$$\bar{x} + \Delta = 12,8 + 10,88 = 23,68$$

Следовательно,

$$1,92 \leq |x_i| \leq 23,68$$

Все результаты измерений, за исключением максимального, удовлетворяют полученному неравенству.

Таким образом,  $x_{\max}=32$  следует отбросить.

#### 1.5 Правило «трёх сигм»

Правило «трёх сигм» основано на том, что случайная величина при нормальном законе распределения практически полностью (на 99,7%) заключена в пределах от  $\bar{x} - 3\sigma$  до  $\bar{x} + 3\sigma$ . Если значение случайной величины отличается от среднего значения  $\bar{x}$  больше чем на  $3\sigma$ , то оно является

аномальным.

$$\Delta_m = 3 \cdot \sigma = 3 \cdot 4,25 = 12,75$$

В силу того, что все разности  $|x_i - \bar{x}|$ , за исключением максимального, не превышают величины максимальной погрешности, принятой для нормального закона распределения, делаем вывод, что в исходном ряду данных содержится грубая погрешность – это  $x_{\max}=32$ , который следует отбросить.

Отбросим результат 32 и пересчитаем основные статистические оценки выборки.

### *1.6 Пересчет после отброса*

Вычислим среднее арифметическое результатов измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{55} \sum_{i=1}^{55} x_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{55} x_i = 682,9$$

$$\bar{x} = \frac{1}{55} \cdot 682,9 = 12,41636 \approx 12,4$$

$$D(x) = \frac{617,51}{55 - 1} = 11,43537 \approx 11,44$$

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(x)$ :

$$\sigma(x) = S = \sqrt{D(x)} = \sqrt{11,43537} = 3,381622 \approx 3,38$$

Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического  $S_x$ :

$$S_x = \frac{3,381622}{\sqrt{55}} = 0,455978 \approx 0,456$$

Результаты 55 измерений, отклонения результатов отдельных измерений от их среднего арифметического значения, квадратичные отклонения сведем в таблицу 4:

Таблица 4 – Расчет показателей

| №  | $x_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $(x_i - \bar{x})^2$ | №  | $x_i$          | $ x_i - \bar{x} $ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|----|-------|-------------------|---------------------|----|----------------|-------------------|---------------------|
| 1  | 3,7   | 8,7               | 75,69               | 29 | 12,5           | 0,1               | 0,01                |
| 2  | 3,7   | 8,7               | 75,69               | 30 | 12,5           | 0,1               | 0,01                |
| 3  | 7     | 5,4               | 29,16               | 31 | 12,5           | 0,1               | 0,01                |
| 4  | 7     | 5,4               | 29,16               | 32 | 12,5           | 0,1               | 0,01                |
| 5  | 7     | 5,4               | 29,16               | 33 | 12,5           | 0,1               | 0,01                |
| 6  | 8     | 4,4               | 19,36               | 34 | 13             | 0,6               | 0,36                |
| 7  | 9,5   | 2,9               | 8,41                | 35 | 13             | 0,6               | 0,36                |
| 8  | 9,5   | 2,9               | 8,41                | 36 | 13             | 0,6               | 0,36                |
| 9  | 9,5   | 2,9               | 8,41                | 37 | 13             | 0,6               | 0,36                |
| 10 | 9,5   | 2,9               | 8,41                | 38 | 13             | 0,6               | 0,36                |
| 11 | 10    | 2,4               | 5,76                | 39 | 13,5           | 1,1               | 1,21                |
| 12 | 10    | 2,4               | 5,76                | 40 | 13,5           | 1,1               | 1,21                |
| 13 | 10,5  | 1,9               | 3,61                | 41 | 13,5           | 1,1               | 1,21                |
| 14 | 11    | 1,4               | 1,96                | 42 | 13,5           | 1,1               | 1,21                |
| 15 | 11    | 1,4               | 1,96                | 43 | 14,5           | 2,1               | 4,41                |
| 16 | 11,5  | 0,9               | 0,81                | 44 | 14,5           | 2,1               | 4,41                |
| 17 | 12    | 0,4               | 0,16                | 45 | 15             | 2,6               | 6,76                |
| 18 | 12    | 0,4               | 0,16                | 46 | 15             | 2,6               | 6,76                |
| 19 | 12    | 0,4               | 0,16                | 47 | 16             | 3,6               | 12,96               |
| 20 | 12    | 0,4               | 0,16                | 48 | 16             | 3,6               | 12,96               |
| 21 | 12    | 0,4               | 0,16                | 49 | 16             | 3,6               | 12,96               |
| 22 | 12    | 0,4               | 0,16                | 50 | 17             | 4,6               | 21,16               |
| 23 | 12    | 0,4               | 0,16                | 51 | 17             | 4,6               | 21,16               |
| 24 | 12    | 0,4               | 0,16                | 52 | 18             | 5,6               | 31,36               |
| 25 | 12    | 0,4               | 0,16                | 53 | 18             | 5,6               | 31,36               |
| 26 | 12    | 0,4               | 0,16                | 54 | 20,5           | 8,1               | 65,61               |
| 27 | 12,5  | 0,1               | 0,01                | 55 | 20,5           | 8,1               | 65,61               |
| 28 | 12,5  | 0,1               | 0,01                |    |                |                   |                     |
|    |       |                   |                     |    | $\Sigma=682,9$ |                   | $\Sigma=617,51$     |

### 1.7 Коэффициент вариации $V$

На практике широко применяют также характеристику рассеяния, называемую коэффициентом вариации  $V$ , который представляет собой

отношение среднего квадратичного отклонения к среднему значению. Коэффициент вариации показывает насколько велико рассеяние по сравнению со средним значением случайной величины. Коэффициент вариации выражается в долях единицы или в процентах. Вычисление коэффициента вариации имеет смысл для положительных случайных величин:

$$V = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \cdot 100 \% = \frac{3,38}{12,4} \cdot 100 \% = 27,25806 \approx 27,26 \%$$

### 1.8 Доверительный интервал

Интервальная оценка с принятой вероятностью  $p$  или уровнем значимости  $\alpha$  определяет диапазон, в котором с определённой вероятностью будет находиться истинное значение средней величины:

$$P(\bar{x} - \Delta \leq |x_{\text{ист}}| \leq \bar{x} + \Delta) = 1 - \alpha$$

где  $P$  – это доверительная вероятность,  $\alpha$  – уровень значимости

Зададим доверительную вероятность  $P_{\text{дов}}=0,95$  и уровень значимости  $\alpha=0,05$ .

Требуется отыскать такое число  $t_{\alpha, n-1}$ , для которого верно равенство

$$P\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha, n-1} < a < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

где  $\bar{x}$  – выборочное среднее;

$s$  – стандартное (среднеквадратическое) отклонение;

$a$  – математическое ожидание;

$n$  – объем выборки (нашем случае 55);

$\alpha$  – величина, в сумме с доверительной вероятностью дающая 1 (в нашем случае 0,05).

Величину  $t_{\alpha, n-1}$  находим по таблицам распределения Стьюдента:

$$t_{\alpha, n-1} = t_{0,05; 54} = 2,005$$

$$12,4 - \frac{3,38}{\sqrt{55}} \cdot 2,005 = 11,4862 \approx 11,49$$

$$12,4 + \frac{3,38}{\sqrt{55}} \cdot 2,005 = 13,3138 \approx 13,31$$

Следовательно,

$$11,49 \leq |x_{\text{ист}}| \leq 13,31$$

Таким образом, неравенство  $11,49 \leq 12,4 \leq 13,31$  является верным.

### 1.9 Необходимое количество экспериментов

Необходимое количество экспериментов зависит от точности, которую нам нужно получить:

$$n_H = \frac{t_a^2 \cdot V^2}{K_\partial^2}$$

$$K_\partial = \frac{\Delta_\partial}{\bar{x}}$$

$$K_\partial = \frac{0,9}{12,4} = 0,07$$

$$n_H = \frac{2,005^2 \cdot 0,2726^2}{0,07^2} = 60,96553 \approx 61$$

Значит, минимальное необходимое количество измерений будет равно 61.

### 1.10 Проверка закона распределения СВ

Нормальный закон распределения выполняется в том случае, если соблюдается два условия:

$$|A| \leq 1,5\sigma_A$$

$$|E| \leq 1,5\sigma_E$$

где  $A$  – показатель асимметрии (характеризует симметричность левой и правой ветвей кривой), равный:

$$A = \frac{1}{n\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

$$A = \frac{1}{55 \cdot 3,38^3} \cdot (-204,663) = -0,09637 \approx -0,096$$

$E$  – показатель эксцесса (характеризует форму вершины кривой):

$$E = \frac{1}{n\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3$$



$$E = \frac{1}{55 \cdot 3,38^4} \cdot 26866,99 - 3 = 0,742739 \approx 0,74$$

$\sigma_A$  – среднеквадратическое отклонение асимметрии нормального закона:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(55-1)}{(55+1)(55+3)}} = \sqrt{0,099754} = 0,315838 \approx 0,316$$

$\sigma_E$  – среднеквадратическое отклонение эксцесса нормального распределения:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24 \cdot 55 \cdot (55-2) \cdot (55-3)}{(55-1)^2 \cdot (55+3) \cdot (55+5)}} = \sqrt{0,358498} = 0,598747 \approx 0,599$$

$$|-0,096| \leq 1,5 \cdot 0,34 = 0,51$$

$$|0,74| \leq 1,5 \cdot 0,599 = 0,8985$$

Оба условия выполнены, следовательно, выборка подчиняется нормальному закону распределения.

### 1.11 Группировка данных

По формуле Стерджеса определим необходимое количество используемых групп:

$$k = 1 + 3,322 \cdot \lg n = 1 + 3,322 \cdot \lg 55 = 6,781485 \approx 7$$

$$x_{\max} = 20,5; x_{\min} = 3,7$$

Вычислим величину равного интервала:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{20,5 - 3,7}{7} = 2,4$$

Расчленим исходную совокупность на 7 групп с величиной интервала в 2,4.

Расчленим исходную совокупность на 7 групп с величиной интервала в 2,4.

Результаты группировки представим в таблице 5.

Таблица 5 – Интервальный статистический ряд выборки

| интервал    | частота<br>попаданий | накопленная<br>частота | относительная<br>частота |
|-------------|----------------------|------------------------|--------------------------|
| [3,7—6,1)   | 2                    | 2                      | 0,04                     |
| [6,1—8,5)   | 4                    | 6                      | 0,11                     |
| [8,5—10,9)  | 7                    | 13                     | 0,24                     |
| [10,9—13,3) | 25                   | 38                     | 0,69                     |
| [13,3—15,7] | 8                    | 46                     | 0,84                     |
| (15,7—18,1) | 7                    | 53                     | 0,96                     |
| [18,1—20,5) | 2                    | 55                     | 1,00                     |
|             | $\Sigma=100$         |                        |                          |

Построим гистограмму (рис.1).

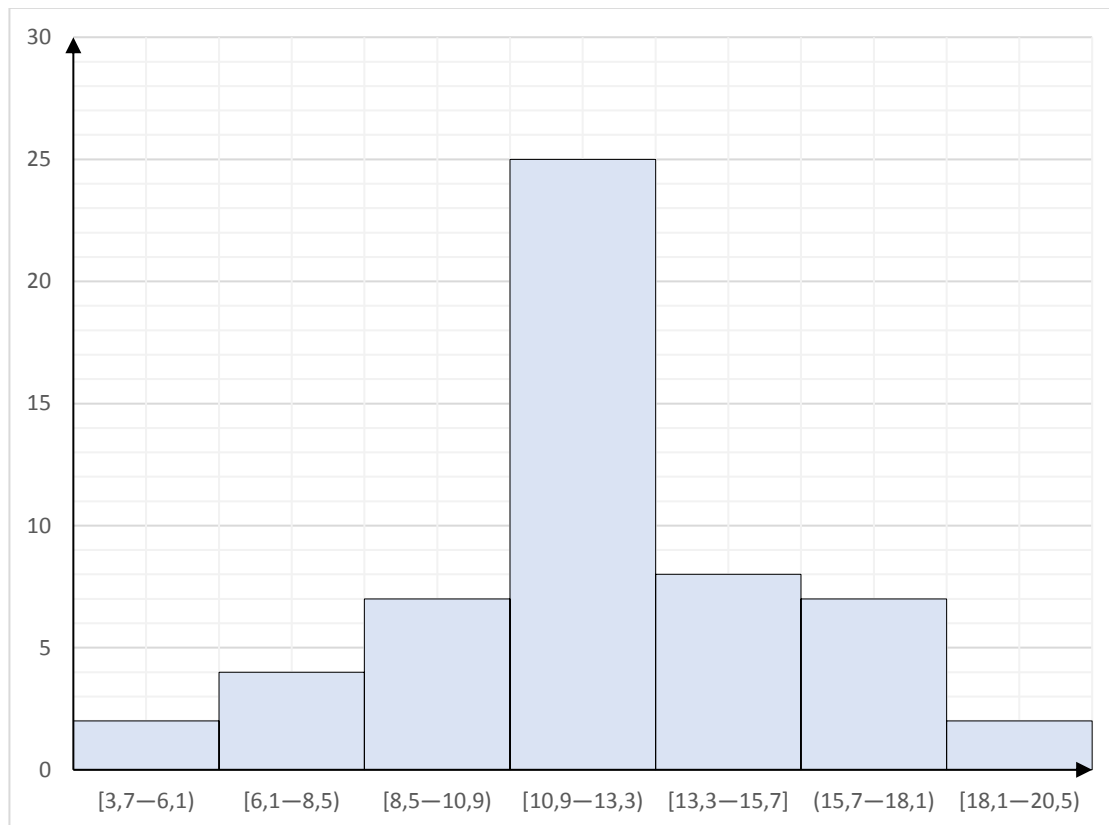


Рисунок 1 – Гистограмма

Вывод:

В данной работе были определены основные статистические оценки выборки: среднее арифметическое выборки, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Произведена проверка на наличие грубых погрешностей по критерию Шовене и с помощью правила «трёх сигм». Отбракованные значения были исключены из выборки и вновь пересчитаны среднее арифметическое выборки, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Кроме того, в работе определены коэффициент вариации, доверительный интервал и необходимое количество экспериментов.

Проверка на соответствие выборки нормальному закону распределения случайной величины дала положительный результат.

Данные выборки были сгруппированы и построена гистограмма.

С помощью методов, используемых в данной работе, можно легко проанализировать данные, полученные экспериментальным путем, и вычислить ошибку в случае неудачи.